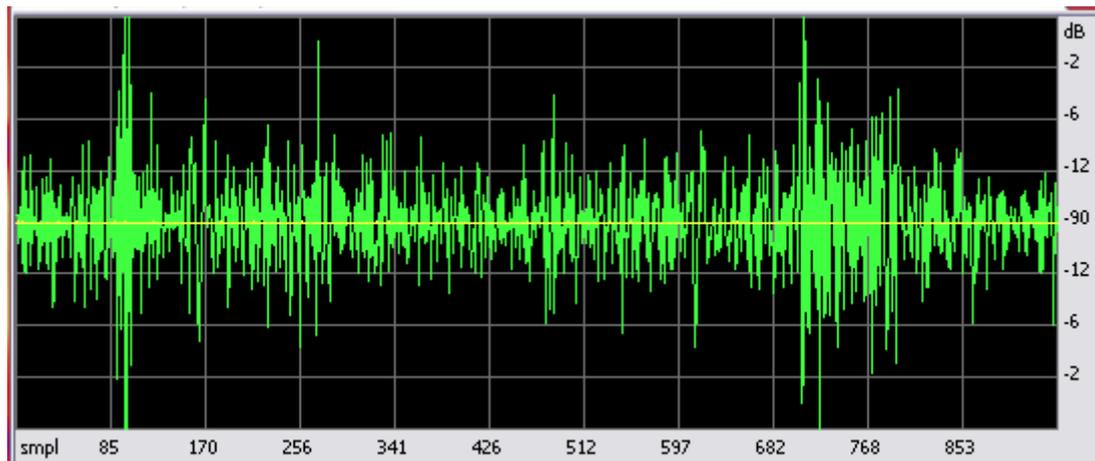


# LE FILTRAGE



## Baccalauréat S Sciences de l'ingénieur

- A1 : Analyser le besoin
- A2 : Composants réalisant les fonctions de la chaîne d'information
- B1 : Identifier la nature de l'information et la nature du signal
- C1 : Identifier la nature et les caractéristiques des grandeurs en divers points de la chaîne d'information

## Objectifs

A la fin de la séquence, l'élève doit être capable de :

- définir la fonction filtrage
- de justifier la nécessité de la fonction filtrage sur un signal
- de caractériser les 4 filtres usuels
- de justifier l'ordre et les fréquences de coupure d'un filtre

## Prérequis

[Caractérisation de l'information analogique et numérique](#)

## Rappels

## Composition d'un signal

Joseph Fourier, un mathématicien, a mis en évidence en 1822 le fait que tout signal était la somme de signaux sinusoïdaux et co-sinusoïdaux.

Cette découverte fondamentale dans le traitement du signal est utilisée encore aujourd'hui pour filtrer ou synthétiser des signaux.

Pour représenter la composition spectrale d'un signal, on utilise un système d'axe graduée en amplitude (axe des ordonnées) et en fréquence. Chaque fréquence est représentée par un trait vertical dont la hauteur est proportionnelle à l'amplitude du signal. Ce système d'axe est appelé un spectre.

## Définitions

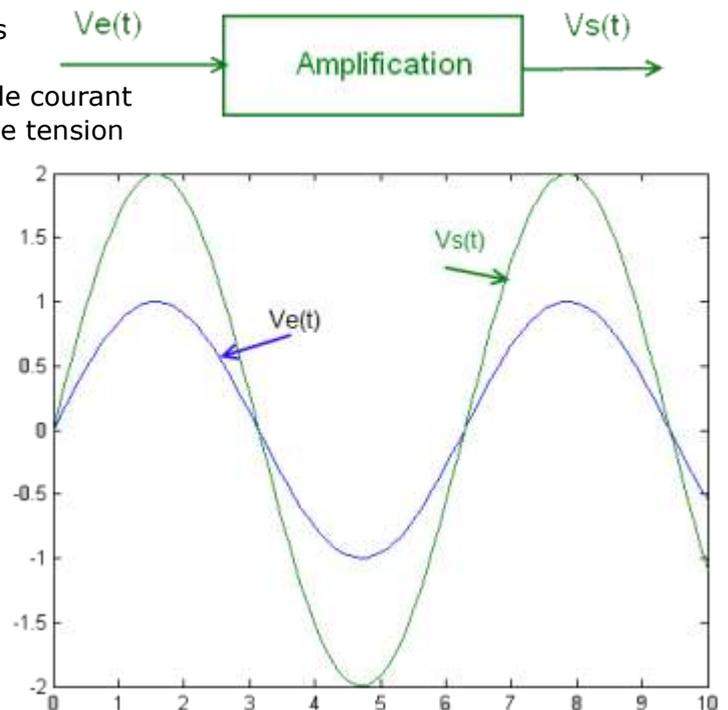
### Amplification

L'amplification d'un signal consiste à augmenter une ou certaines de ses grandeurs électriques :

- le courant : amplification de courant
- la tension : amplification de tension
- la puissance : amplification de puissance

L'amplification de puissance étant à la fois une amplification de courant et de tension.

Une opération d'amplification est donc une opération de multiplication par une constante supérieure à 1.

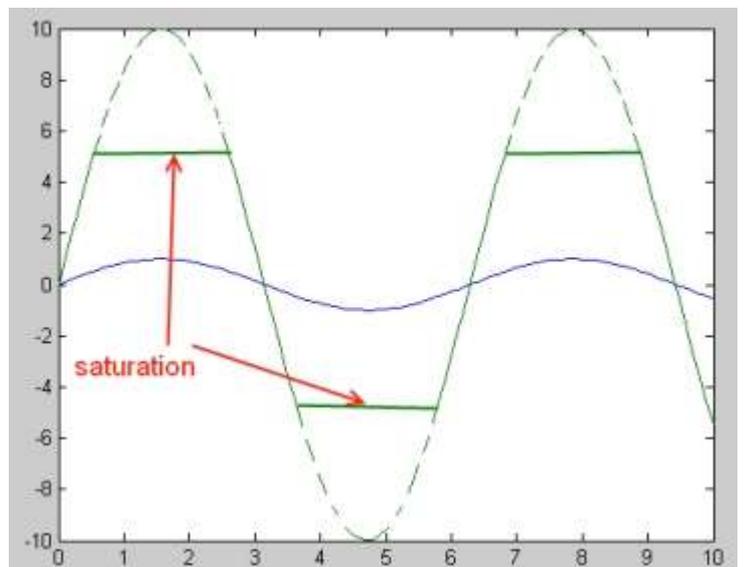


### La saturation

Les structures de traitement des signaux analogiques sont réalisées avec des amplificateurs. Ces derniers ne peuvent restituer, au maximum que la tension maximum qui les alimente.

Si théoriquement ils doivent restituer plus, la tension de sortie ne dépassera pas cette tension d'alimentation. On dit qu'ils saturent.

**Exemple d'un signal amplifié par un amplificateur alimenté en +5V et -5V.**



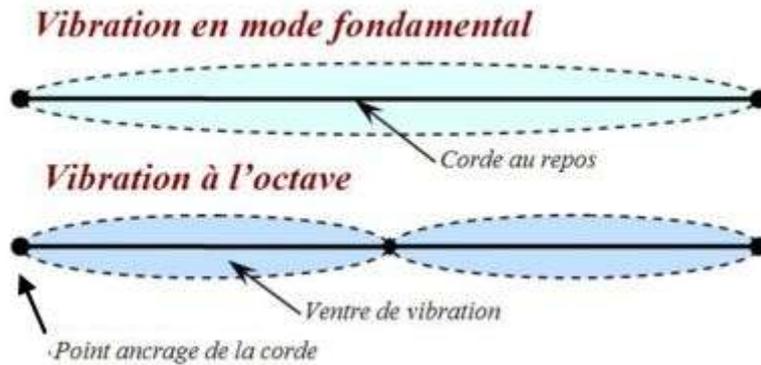
### Une octave

Une octave est un rapport de deux entre deux fréquences.

Par exemple un LA2 de fréquence 440Hz est une octave en dessous d'un LA3 de 880Hz.

Pour changer de son à l'octave, on double par exemple la longueur d'une flûte : une flûte ténor mesure 60cm tandis qu'une flûte soprano mesure 30cm.

Pour une guitare en réduisant de moitié la longueur vibrante d'une corde on joue la même note que la corde à vide mais à une octave plus haut.

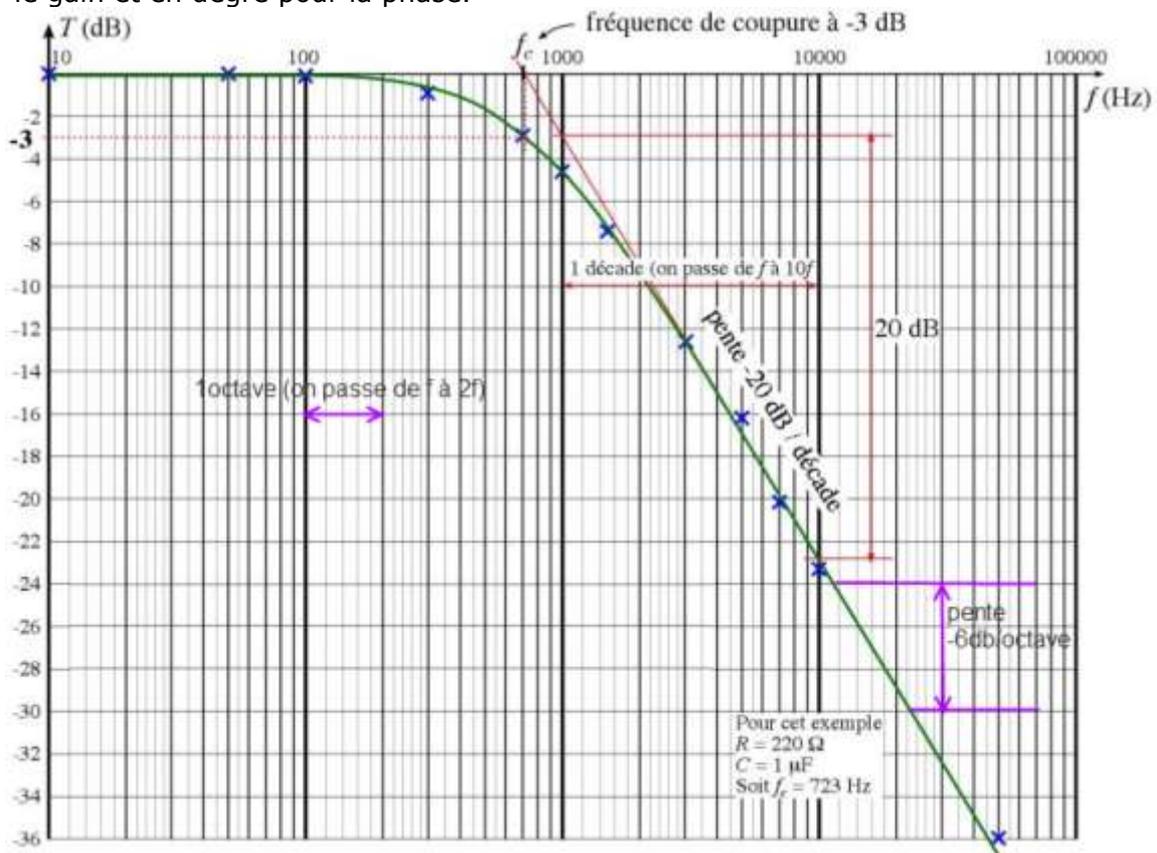


## Une décade

Une décade est un rapport de 10 entre deux fréquences. Généralement, pour des grandeurs évoluant par décade, on utilise une échelle logarithmique (logarithme décimal) de sorte que les phénomènes soient plus visibles.

## Représentation de Bode

On utilise généralement le diagramme de Bode pour représenter un phénomène fréquentiel. Son axe des abscisses est graduée de manière logarithmique et ses axes des ordonnées en dB pour le gain et en degré pour la phase.



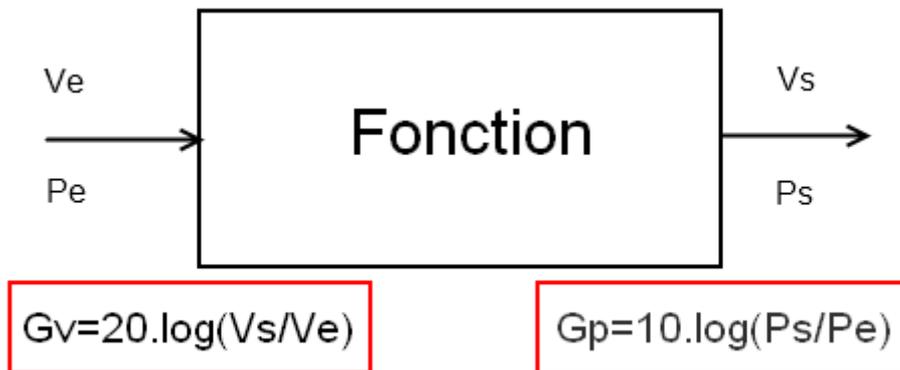
## Le gain

Plutôt que de parler de coefficient d'amplification, on préfère parler de GAIN.

Le gain désigne la capacité d'une structure à augmenter ou diminuer la puissance ou l'amplitude d'un signal.

Si le gain est positif, la structure amplifie le signal, si le gain est négatif, la structure atténue le signal.

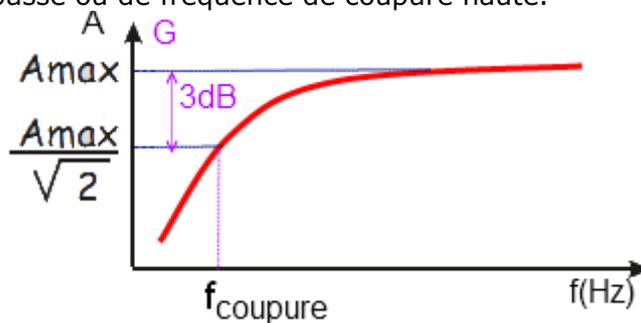
L'unité du gain est le décibel noté dB.



## Fréquence de coupure

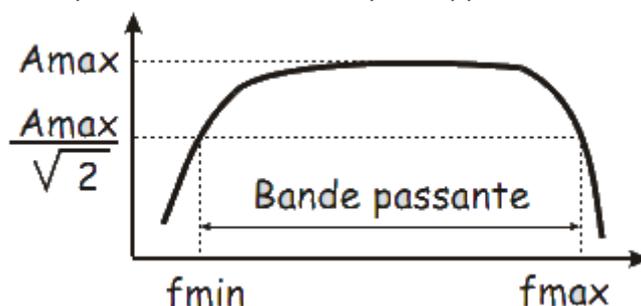
La fréquence de coupure spécifie une fréquence particulière à laquelle le signal est atténué de -3dB (ou subit une atténuation de  $1/\sqrt{2}$ ) par rapport à l'amplitude maximale.

Selon la position de cette fréquence par rapport à la courbe de fréquence on parle de fréquence de coupure basse ou de fréquence de coupure haute.



## La bande passante

C'est la différence entre la fréquence de coupure haute et la fréquence de coupure basse. Les deux fréquences sont prises pour une atténuation par rapport au maximum de  $1/\sqrt{2}$  (-3dB).



## Filtrage

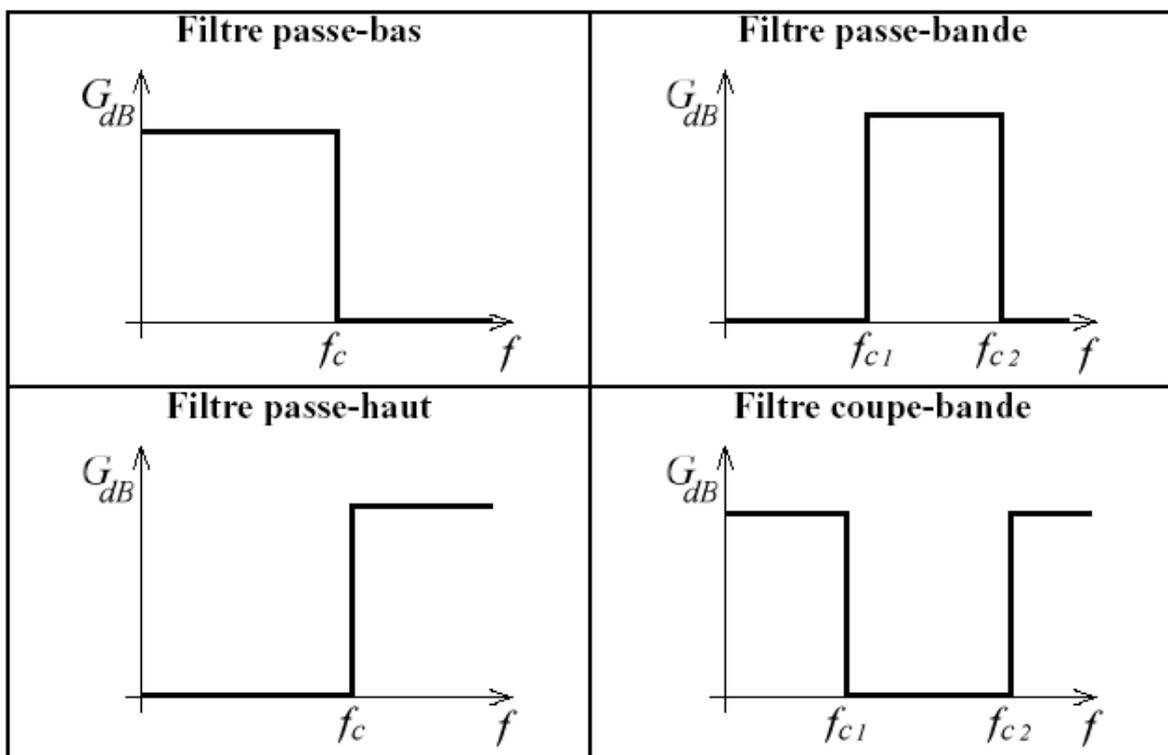
La fonction filtrage est associée à une structure appelée filtre. Un filtre "classique" est traditionnellement associé à des composants passifs comme les condensateurs ou les inductances mais il existe également des filtres numériques faisant appel à des microprocesseurs ou à des processeurs de signaux (DSP).

## Définition

On parle de filtrage de signal lorsqu'on atténue (la suppression est difficile) ou favorise dans un signal (électrique ou autre) des fréquences par rapport à d'autres.

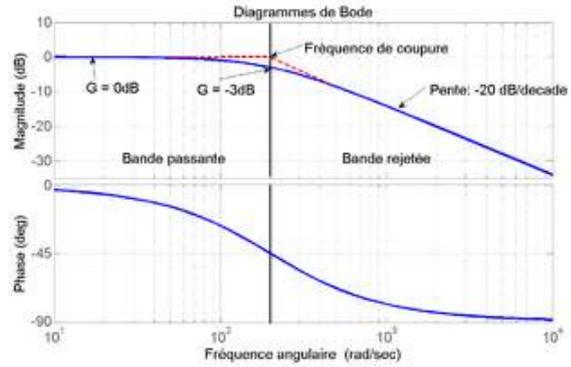
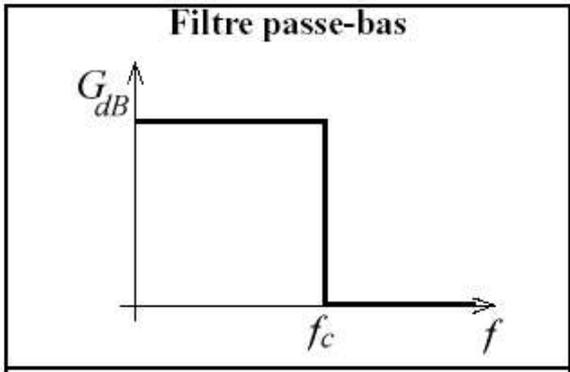
En général, on recense 4 types de filtres :

- Le filtre passé bas qui laisse passer les fréquences basses
- Le filtre passé haut qui laisse passer les fréquences hautes
- Le filtre passé bande qui laisse passer une bande de fréquence
- Le filtre coupe-bande qui supprime une bande de fréquence

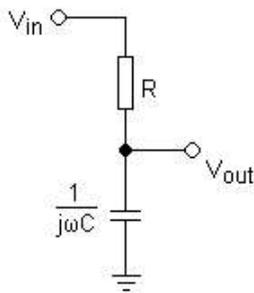


## Filtre passe bas

Un filtre passe bas laisse passer les fréquences entre 0Hz et la  $f_c$  (la [fréquence de coupure](#)). Au-delà de  $f_c$ , les fréquences sont atténuées.



Exemple de solution pour un filtre passe bas



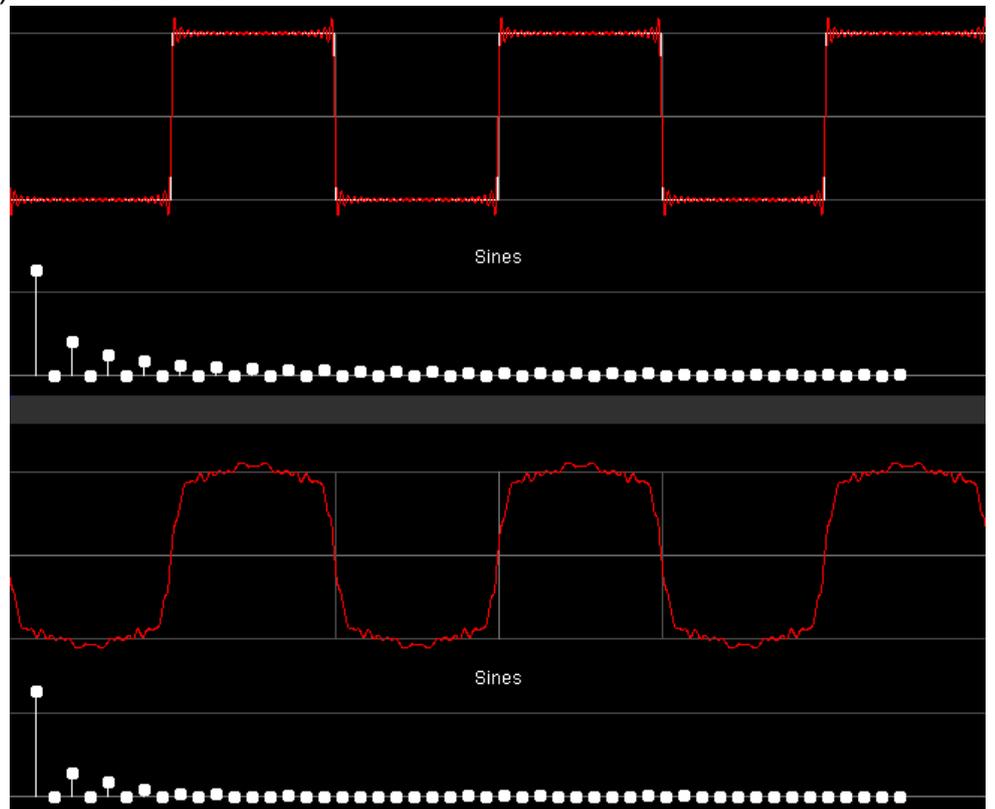
$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

**Analyse du circuit**

- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$
- $V_{out} = V_o$
- et  $V_{in} = v_i$

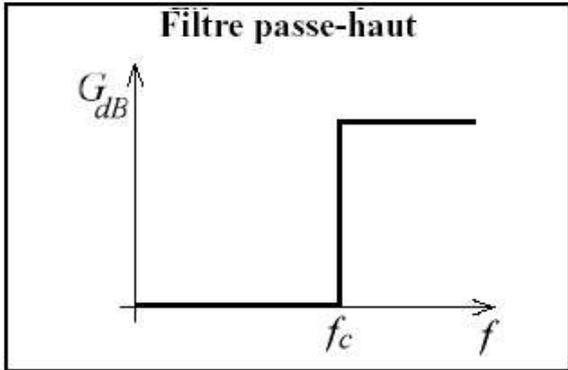
Si  $f \rightarrow 0$  alors  $\lim(H(j\omega)) = 1$  donc  $V_o = V_i$   
 Si  $f \rightarrow \infty$  alors  $\lim(H(j\omega)) = 0$  donc  $V_o = 0$

Ci-contre, la transformation d'un signal carré par un filtre passe bas :

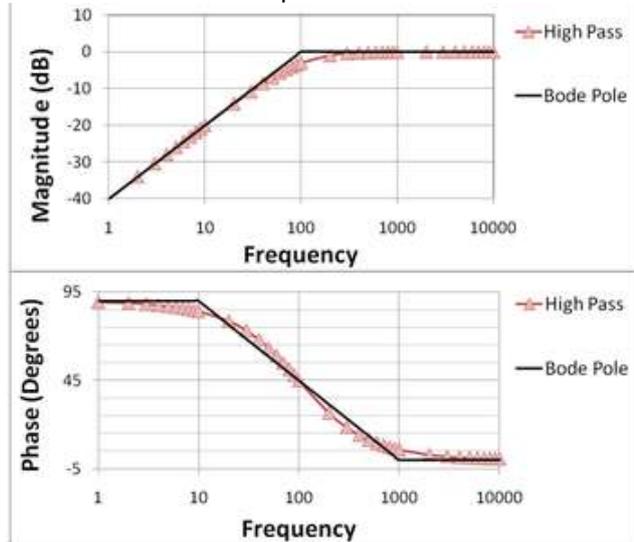
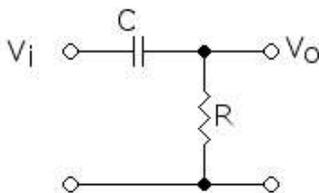


## Filtre passe haut

Un filtre passe-haut laisse passer les fréquences hautes et atténue les fréquences basses.



Exemple de solution pour un filtre passe haut



$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

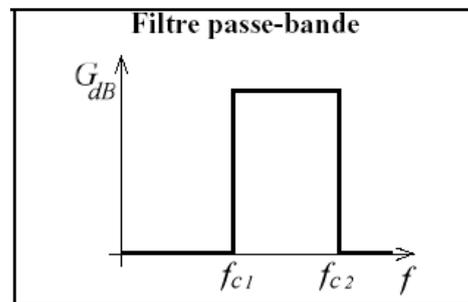
### Analyse du circuit

- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$
- $Z_C = 1/j \cdot C \cdot \omega$

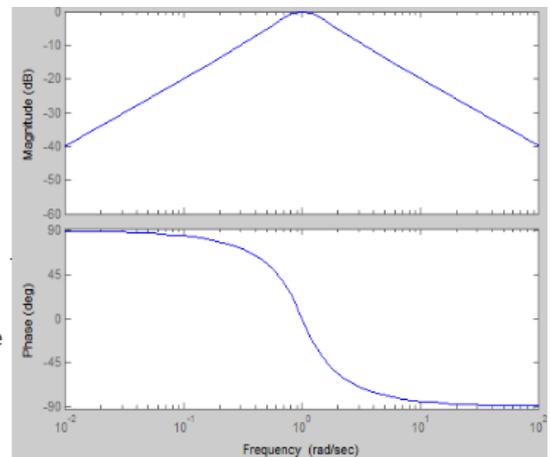
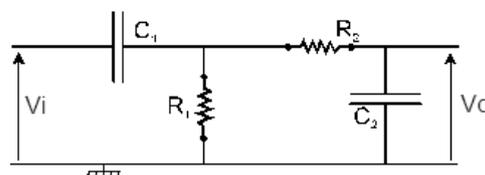
Si  $f \rightarrow 0$  alors  $\lim(H(j\omega)) = 0$  donc  $V_o = 0$   
 Si  $f \rightarrow \infty$  alors  $\lim(H(j\omega)) = 1$  donc  $V_o = V_{in}$

## Filtre passe-bande

Un filtre passe-bande est un filtre ne laissant passer qu'une bande ou intervalle de fréquences compris entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute du filtre. Il cumule le fonctionnement du filtre passe-bas et du filtre passe-haut.



Exemple de solution pour un filtre passe bande



$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{j R_1 C_1 \omega}{1 + j R_1 C_1 \omega} \times \frac{1}{1 + j R_2 C_2 \omega}$$

### Analyse du circuit

- $\omega = 2.\pi.f$
- $Z_C = 1/j.C\omega$

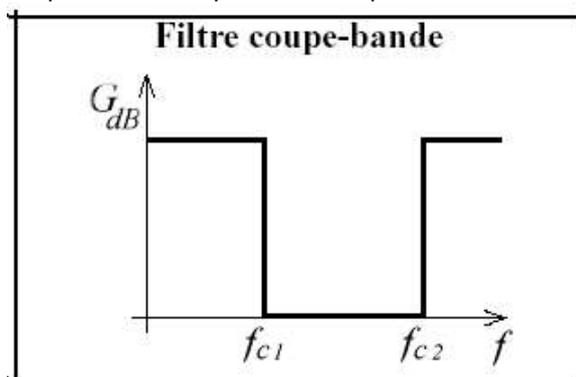
Si  $f \rightarrow 0$  alors  $\lim(H(j\omega))=0$  donc  $V_o = 0$  ( $Z_{C1}=Z_{C2}=\infty$  donc C1 se comporte comme un interrupteur ouvert et ne laisse pas passer le signal d'entrée)

Si  $f \rightarrow \infty$  alors  $\lim(H(j\omega))=0$  donc  $V_o = 0$  ( $Z_{C1}=Z_{C2}=0$  donc C2 se comporte comme un interrupteur fermé et court-circuite la sortie)

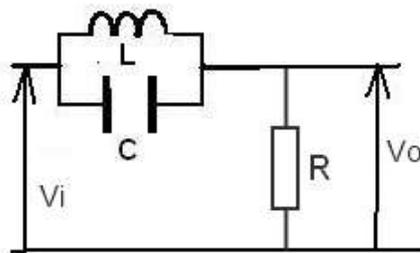
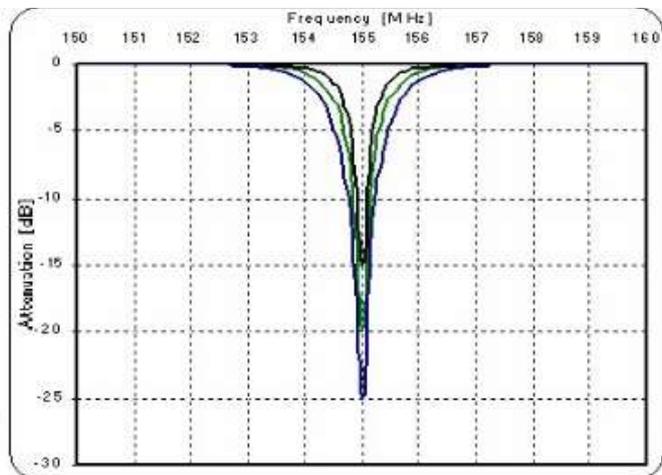
## Réjecteur de bande ou coupe-bande

Un filtre coupe-bande aussi appelé filtre réjecteur de bande est un filtre empêchant le passage d'un intervalle de fréquences.

Il est composé d'un filtre passe-haut et d'un filtre passe-bas dont les fréquences de coupure sont souvent proches mais différentes, la fréquence de coupure du filtre passe-bas est systématiquement inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut.



Exemple de solution pour un filtre réjecteur



$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j(L\omega/R) - LC\omega^2}$$

### Analyse du circuit

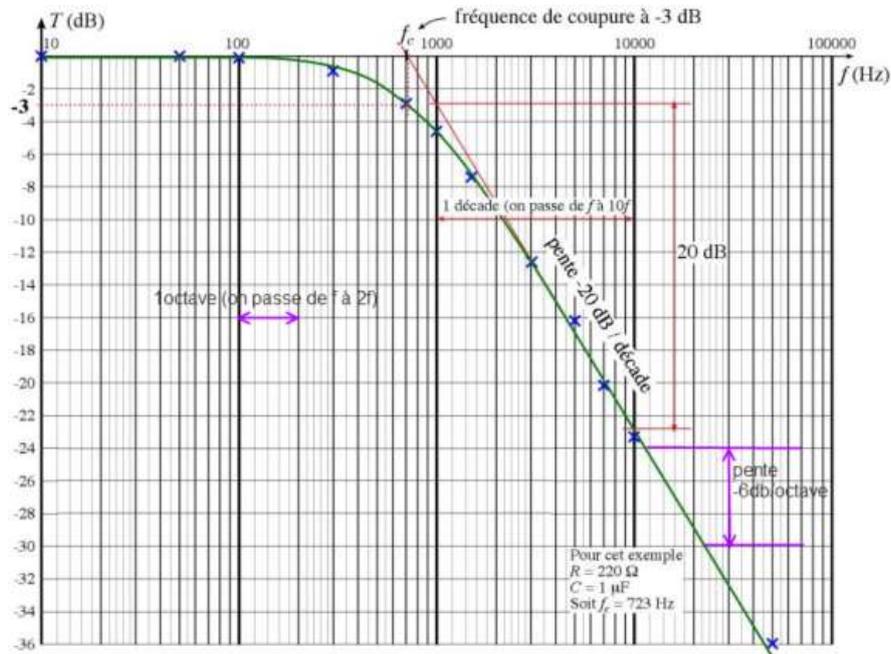
- $\omega = 2.\pi.f$
- $Z_C = 1/j.C\omega$
- $Z_L = j.L.\omega$

- Si  $f \rightarrow 0$  alors  $\lim(H(j\omega))=1$  donc  $V_o = V_i$  ( $Z_L=0$  donc L se comporte comme un interrupteur fermé et le signal d'entrée passe en sortie)
- Si  $f \rightarrow \infty$  alors  $\lim(H(j\omega))=1$  donc  $V_o = V_i$  ( $Z_C=0$  donc C se comporte comme un interrupteur fermé et le signal d'entrée passe en sortie)
- Entre les deux  $Z_L$  et  $Z_C$  sont non nuls et les signaux de fréquence  $f$  sont atténués

## Ordre d'un filtre

L'ordre d'un filtre détermine sa capacité à atténuer les signaux fréquents.  
 Dans le cas d'un filtre du premier ordre, l'atténuation est de 6dB/octave ou 20dB/décade.

## Courbe de gain d'un filtre passe bas du 1° ordre



### Application :

Le filtre ci-dessus présente une atténuation à -3dB pour 700Hz.  
 Supposons  $V_e=1V$  à 100Hz.

#### Fréquence de coupure

Sa fréquence de coupure est de 700Hz

Si à 100Hz  $V_e=1V$  alors à 100Hz  $V_s=1V$  car  $20 \cdot \log(V_s/V_e)=0 \Leftrightarrow \log(V_s/V_e)=0 \Leftrightarrow V_s/V_e=10^0=1$

#### Calcul de $V_s$ à la fréquence de coupure

A la fréquence de coupure, l'atténuation est de 3dB

Donc  $20 \cdot \log(V_s/V_e)=-3 \Leftrightarrow \log(V_s/V_e)=-0,15 \Leftrightarrow V_s/V_e = 10^{-0,15} \Leftrightarrow V_s = 0,707 \cdot V_e = 0,707V$

#### Calcul de la tension à 10kHz

Pour un filtre de cet type (Appelons le un 1° ordre) l'atténuation est de 20dB/décade.

Donc à 7000Hz l'atténuation sera de 20dB par rapport à 700Hz.

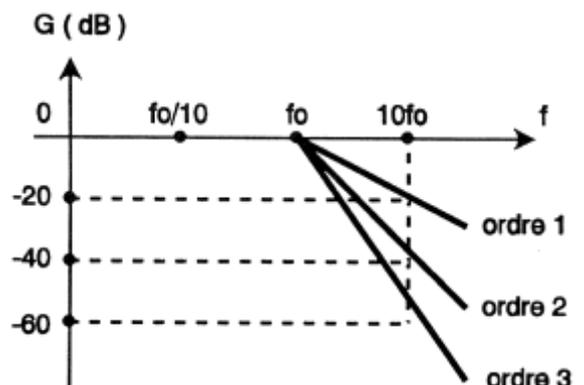
A 10kHz elle sera de 20dB x 10000/7000 soit 28,6dB.

$20 \cdot \log(V_s/V_e) = -28,6 \Leftrightarrow \log(V_s/V_e) = -1,43 \Leftrightarrow V_s/V_e = 10^{-1,43} = 0,037 \Leftrightarrow V_s = 0,707 \times 0,037 = 26mV$

## Filtre d'ordre $n$

Si le signal de sortie d'un filtre du premier ordre est injecté sur un deuxième filtre du premier ordre, l'atténuation sera de deux fois 20dB/décade soit -40dB/décade. On aura réalisé un filtre du 2° ordre.

### Exemple de filtre passe bas d'ordre 1, 2 et 3



## Filtres passifs/actifs

### Filtre passif

Un filtre passif fait appel à des éléments passifs. En conséquence le signal de sortie ne peut jamais être supérieur au signal d'entrée.

Dans le cas de filtres électriques, les filtres passifs sont composés de résistances, de condensateurs et de bobines.

### Filtre actif

Un filtre actif est composé d'éléments actifs (transistors, amplificateurs opérationnels...) qui permettent d'avoir des amplitudes du signal de sortie supérieures aux amplitudes du signal d'entrée.

